Vymedzenie logiky v sústave vied a predmet logiky

Slovo *logika* môže v závislosti na kontexte nadobúdať rôzne významy. Tieto významy síce navzájom súvisia, no určite nie sú totožné. Vo voľnom a v bežnej reči často používanom význame *logikou* rozumieme čosi ako vnútornú štruktúru, skôr tušenú než zjavnú, ktorá však danej veci (záležitosti), výkladu nejakého súboru javov, tej ktorej oblasti poznania či argumentácii dáva zmysel alebo zaň preberá záruku. Naopak, jej narušením sa tento zmysel vytráca a jej absenciou či popretím sa prevracia v nezmysel. Takto zvykneme hovoriť o *logike veci*, *logike zákona*, *logike vývoja*, *logike deja*, *logike konfliktu*, a pod. Tento význam býva do značnej miery upresnený v kontexte vedeckých teórií, najmä ich deduktívnych súčastí. *Logika* tu splýva so súborom metodologických zásad budovania takýchto teórií, čo o. i. zahŕňa analýzu ich východzích princípov, metód spracovania experimentálnych dát a faktov, formuláciu hypotéz a metód ich overovania.

V trochu špecifickejšom význame je *logika* súborom pravidiel a zásad správneho myslenia, usudzovania a odvodzovania, ktorými je potrebné sa pri týchto činnostiach riadiť a ktorých dodržiavanie zaručuje ich správnosť. Naopak, ich narušenie je varovným signálom poukazujúcim na chyby v tom ktorom úsudku. Treba však upozorniť, že *správnosť* nie je to isté ako *pravdivosť*. Logicky správna úvaha vedie nevyhnutne k pravdivému záveru, len ak vychádza z pravdivých predpokladov. Na druhej strane, k pravdivému záveru možno neraz dospieť aj logicky správnou úvahou vychádzajúcou z nepravdivých predpokladov, ako aj logicky chybnou úvahou bez ohľadu na pravdivosť východzích predpokladov.

Logika sa tak stáva vedeckou disciplínou na pomedzí filozofie, metodológie vedy, jazykovedy a (pretože hojne využíva matematické metódy a postupy) aj matematiky, s dôležitými uplatneniami v oblasti práva a spätne v matematike. Pre účely nášho kurzu však *logiku* budeme chápať v nasledujúcom ešte užšom význame:

> *Logika je normatívna vedecká disciplína, ktorá skúma formu, štruktúru a zákony správneho (t. j. logického) myslenia a usudzovania, tak ako sa prejavujú v jazyku, či už hovorenom alebo písanom, abstrahujúc pritom od obsahu konkrétnych myšlienok a úsudkov.*

Tento „slogan“ si však vyžaduje podrobnejší komentár.

Zo skúsenosti vieme, že myslenie a usudzovanie sa môžu uberať po cestách rozumu i po cestách nerozumu, že môžu byť plne logické, menej logické aj celkom nelogické. Svedčia o tom napr. často používané posmešné až politicky nekorektné výrazy ako *ženská logika*, *vojenská* alebo *policajná logika* a pod. Ak je však myslenie nelogické, tým horšie pre myslenie. Podobne, chybný (nelogický) úsudok nevyvracia logiku, ale logika vyvracia takýto úsudok. Poslaním logiky tak nie je emprický popis rôznych podôb myslenia a usudzovania, ale stanovovanie a formulácia *noriem* zaručujúcich ich správnosť. Hovoríme, že logika plní voči jazyku a mysleniu *normatívnu funkciu.*

Čitateľ si iste všimol výskyt adjektíva *logický* našom vymedzení logiky ako vedeckej disciplíny, čo v ňom mohlo vyvolať pocit, že sa tak trochu motáme v *logickom kruhu.* Nuž, nemienime to zakrývať. Autor otvorene priznáva, že bez istej znalosti logiky, presnejšie bez schopnosti logicky uvažovať, sa logika vysvetliť ani študovať nedá. Bude teda predpokladať, že jeho čitatelia či poslucháči už vedia logicky myslieť aj logicky argumentovať, a nemá v úmysle ich to učiť, ale naopak, bude to od nich vyžadovať. Na druhej strane však štúdium logiky, zahŕňajúce zvedomenie si a reflexiu princípov logického myslenia a usudzovania, tieto schopnosti nepochybne rozvíja a kultivuje.

Pristavme sa na chvíľu pri otázke vzťahu logiky a jazyka. Hoci myslenie sa myslením v jazyku pravdepodobne nevyčerpáva – jeho súčasťou sú totiž i rôzne obrazy a neverbálne predstavy, neurčité tušenia a vhľady, ako aj rôzne nálady a emócie – jednako, ak sa chceme o obsah či výsledky svojho myslenia podeliť s inými ľuďmi, musíme im ich nejako zdeliť čiže skomunikovať. Najefektívnejší nástroj komunikácie, akým disponujeme, je náš jazyk, či už v jeho hovorenej alebo písanej podobe. Komunikácia v jazyku si však od nás žiada dodať jazykovú podobu aj tým zložkám nášho myslenia, ktoré ju pôvodne nemali. Samozrejme, je tu i možnosť vyjadriť sa prostriedkami hudby alebo výtvarného umenia, pohybom a tancom, či gestami a mimikou, a tu (s výnimkou posunkovej reči) je logika krátka. Krátka je aj na mnohé podoby literárnej tvorby, najmä na poéziu, no nielen na ňu. Avšak úvahy, v ktorých na základe nejakých prijatých východzích predpokladov logickou argumentáciou (zase ten bludný kruh) vyvodzujeme nejajé závery, prebiehajú plne, i keď nie výlučne v jazyku (v hovorenom prejave totiž hrajú istú úlohu aj intonácia, gestá a mimika) a spadajú do kompetencie logiky.

Napokon si skúsme objasniť, čo to vlastne znamená abstrahovať od *obsahu* jednotlivých myšlienok a úsudkov a sústrediť sa výlučne na ich *formu*. Je také niečo vôbec možné? Snaha vidieť v rôznorodých javoch ich obsah a formu a tieto dve zložky od seba oddeľovať tkvie hlboko v tradícii európskeho myslenia. A hoci je do značnej miery umelá, má zároveň značný podiel na úspechoch západnej civilizácie na poli filozofickom, vedeckom a v konečnom dôsledku aj technickom. Umožňuje nám totiž vyčleniť niečo, čo považujeme z istého hľadiska za dôležité či rozhodujúce (forma) a oddeliť to od toho, čo z tohto hľadiska považujeme za menej dôležité alebo druhoradé (obsah). Zbavením sa obsahu vzniká v myslení značne zjednodušená abstraktná *forma* nejakého javu, ktorú možno ľahšie podrobiť myšlienkovému skúmaniu. Navyše takáto abstraktná forma sa môže vyskytnúť aj v inej oblasti javov a umožniť naplniť ju novým obsahom a preniesť tak na túto oblasť poznatky získané v pôvodnej oblasti. To prispieva k univerzálnemu charakteru európskej vedy a tvorí jeden zo základných pilierov *redukcionizmu*, ktorý patrí k vedúcim metodologickým princípom vedeckého skúmania. Taktiež to umožňuje široké uplatnenie matematických metód a naopak, vytvára podnety pre ďalší rozvoj matematiky.

Filozofický problém oddeliteľnosti formy a obsahu sa v rozvinutej podobe po prvýkrát vynára v antickom Grécku v súvislosti s klasickou geometriou. Niektoré rovinnné, prípadne priestorové útvary nás zaujmú svojim *tvarom*, najmä jeho jednoduchosťou a symetriou. Tieto tvary dostali osobitné pomenovania. V rovine k nim patria najmä *trojuholník* (s rôznymi prívlastkami ako *rovnostranný*, *rovnoramenný*, *pravouhlý*), *obdĺžnik*, *štvorec* ako jeho špeciálny prípad, ďalej *kruh*, *pravidelný päťuholník*, *pravidelný šesťuholník*, atď. V priestore sú to predovšetkým tzv. *platónske telesá*, čiže *pravidelný štvorsten*, *kocka*, *osemsten*, *dvanásťsten* a *dvadsaťsten*, a tiež *guľa*, *pyramída* čiže *štvorboký ihlan*, atď. Mnohé z týchto tvarov sa zároveň ukazajú ako účelné a žiadúce v rôznych oblastiach praktickej ľudskej činnosti: pri vymeriavaní pozemkov, stavbe obydlí, chrámov a palácov, v rôznych remeslách, a pod. Pritom tieto tvary samotné, a ešte väčšmi dômyselne skombinované pôsobia na naše estetické cítenie, a hrajú preto dôležitú úlohu vo výtvarnom umení (v maľbe i v sochárstve) a v architektúre.

Okrem toho výtvory ľudskej činnosti využívajúcej spomínané tvary sú spravidla tým dokonalejšie, čím presnejšie a dokonalejšie sa im darí dosiahnuť či napodobniť príslušný tvar. So snahou o dokonalosť prichádza aj uvedomenie, že absolútna dokonalosť je, aspoň pre ľudského tvorcu, nesosiahnuteľná. Čisté a dokonalé geometrické tvary sa tak osamostatňujú a stávajú sa nedosiahnuteľným *ideálom*. Osamostatňuje sa aj *geometria* ako veda skúmajúca práve tieto osamostatnené ideálne tvary. Zároveň sa zoznam ideálnych geometrických tvarov rozrastá o ďalšie realite ešte vzdialenejšie objekty: k nim patria predovšetkým *body*, t. j. akési najmenšie možné miesta v rovine alebo v priestore zbavené akejkoľvek rozľahlosti, a *priamky* resp. *úsečky*, čiže dokonale rovné čiary bez akejkoľvek hrúbky.

Uvedený výklad, podľa ktorého ideálne geometrické objekty sú výtvorom ľudského intelektu a majú svoj pôvod v skúsenosti a praktickej ľudskej činnosti, sa niesol v duchu Aristotelovom. Je však tiež možné prijať stanovisko zastávané Platónom, podľa ktorého ideálne geometrické objekty majú samostatnú existenciu a pobývajú v ideálnom geometrickom svete (niekde na polceste medzi materiálnym svetom a svetom čistých ideí), ktorý vo svojej existencii predchádza pozemský materiálny svet. Ideálne geometrické objekty majú účasť na reálnych objektoch príslušných tvarov, a to tým väčšiu, čím vernejšie ten ktorý materiálny objekt svojim tvarom napodobňuje príslušný ideálny tvar. Čistota ideálneho geometrického objektu je však v jeho pozemskom uskutočnení vždy viac či menej „zašpinená“ jeho obsahom, presnejšie jeho materiálnou náplňou, a len tak povediac cez ňu či spoza nej presvitá.

Pre potreby nášho kurzu nezáleží na tom, ktorému z uvedených dvoch výkladov dáme prednosť. Dôležité je si uvedomiť, že antická geometria dokazuje možnosť myšlienkového oddelenia formy a obsahu širokej triedy javov. Pritom geometria už vo svojej pôvodnej antickej podobe, a o to väčšmi vo svojich ďalších vývojových štádiách, je výrečným a nespochybniteľným dokladom plodnosti a úspešnosti takéhoto prístupu.

Ako budeme mať možnosť ešte viackrát uvidieť, podobné oddelenie formy od obsahu pripúšťa aj logika. Navyše v porovnaní s geometriou je toto oddelenie konceptuálne podstatne jednoduchšie a nenastoluje analogické problémy metafyzickej povahy. To je umožnené najmä symbolickým zápisom inšpirovaným matematikou, ktorý poskytuje konkrétnu reprezentáciu logických foriem. Ukážme si na jednoduchom príklade, čo tým máme na mysli.

Jeden zo známych sylogizmov sa zvykne ilustrovať úvahou:

Všetci ľudia sú smrteľní.
Sokrates je človek.
Preto *Sokrates je smrteľný.*

Prvé tvrdenie sa zvykne nazývať aj *veľká premisa*, druhé *malá premisa* a tretie *záver*. Uvedomme si, že záver vyplýva z premís s logickou nevyhnutnosťou. Správnosť uvedenej úvahy sa nezakladá na empirickom dôkaze Sokratovej smrteľnosti, ktorý bol podaný vykonaním rozsudku odsudzujúceho ho na trest smrti vypitím čaše odvaru z bolehlavu. Rovnakú formu má aj nasledujúca úvaha:

Všetci králi sú kone.
Alexander Veľký bol kráľ.
Preto *Alexander Veľký bol kôň.*

Hoci je svojim spôsobom absurdná, aj táto úvaha je logicky správna, i keď jej záver je očividne nepravdivý. Ďalšia úvaha podobného typu:

Všetci králi sú kone.
Alexander Veľký bol kôň.
Preto *Alexander Veľký bol kráľ.*

však logicky správna nie je, lebo jej záver – hoci je pravdivý – z jej predpokladov nevyplýva. Na druhej strane, ďalšia absurdná úvaha

Všetci králi sú kone.
Alexander Veľký nebol kôň.
Preto *Alexander Veľký nebol kráľ.*

je logicky správna, i keď jej záver je nepravdivý (rovnako ako jedn z jej predpokladov).

Nebolo by ťažké uviesť ďalšie príklady logicky platných úsudkov spadajúcich pod rovnakú schému ako prvé dva. Táto forma však spoza jednotlivých príkladov iba presvitá. Jej pochopenie sa dosahuje ilustrovaním na dostatočnom množstve vhodných príkladov. U Aristotela sa však po prvýkrát v histórii, vďaka použitiu subjekt-predikátových premenných, vynára jej explicitná podoba:

Všetky M sú P.
Všetky S sú M.
Preto *všetky S sú P.*

Prípadne:

Všetky M sú P.
Niektoré S je M.
Preto *niektoré S je P.*

Stredný člen M vystupuje v oboch premisách, v prvej hrá úlohu subjektu, v druhej úlohu predikátu, a závere sa nenachádza. Člen P sa vykytuje v prvej premise a v závere, pričom v oboch hrá úlohu predikátu; člen S sa nachádza v druhej premise a v závere, v oboch v úlohe subjektu.

S využitím moderného symbolického jazyka, ktorý sa však zrodil až koncom 19. storočia, môžeme uvedené formy zachytiť vcelku triviálnym, no zároveň prehľadným spôsobom, umožňujúcim navyše odlíšiť formu prvého úsudku od foriem ďalších dvoch. Nech $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ označujú ľubovoľné vlastnosti (predikáty) premenného objektu x a a označuje ľubovoľný konkrétny objekt. Potom nasledujúce úsudky sú logicky platné:

$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$	$(\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$
$P(a)$	$(\forall x)(R(x) \Rightarrow P(x))$	$(\exists x)(R(x) \wedge P(x))$
Preto $Q(a)$	Preto $(\forall x)(R(x) \Rightarrow Q(x))$	Preto $(\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$

Podobná forma sa objavuje v logike *stoickej školy*; v nej úlohu výrokových premenných preberajú radové číslovky:

Keď prvé, tak druhé.
Ale prvé.
Preto *druhé.*

Na záver si ešte vyjasnime, ako chápať slovné spojenie *matematická logika.* Logika môže byť matematická v zásade v dvoch významoch: jednak metódami, ktoré používa, jednak svojim predmetom. Logika môže analyzovať rôzne fragmenty prirodzených či umelých jazykov, ktoré takúto analýzu pripúšťajú. Pri tom jej môžu v rôznej miere poslúžiť matematické metódy, napr. symbolická reprezentácia jednotlivých jazykových objektov alebo ich tried a modelovanie vzťahov medzi nimi matematickými prostriedkami. Tie spravidla umožňujú spracovanie pomocou výpočtovej techniky. V tomto zmysle často používame termíny ako *formálna logika* alebo *symbolická logika.* Príkladom takejto logiky je *výrokový počet*, ktorému sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole. Značenie a jeho štruktúru v symbolickom jazyku učene nazývame *syntax.* Priraďovanie významu symbolom a ich konglomerátom je náplňou *sémantiky.* Práve skúmanie vzťahu medzi syntaxou a sémantikou bude kľúčovou témou ako aj jednotiacim prvkom štúdia rôznych odvetví logiky v našom kurze.

Predmetom logiky sa však môžu stať aj jazyky matematických teórií, analýza ich deduktívnej výstavby a vzťah medzi ich syntaxou a sémantikou. Sotva niekoho prekvapí, že práve jazyky matematických teórií, vďaka vysokému stupňu presnosti a jednoznačnosti, sú na podobnú analýzu obzvlášť vhodné. Takáto logika je potom matematická svojim predmetom. Rovnako neprekvapí, že táto logika zároveň hojne používa matematické metódy. Je to teda logika matematická tak svojimi metódami ako aj svojim predmetom. Uvidíme, že takáto „dvojnásobne matematická“ logika nielenže prináša zjednocujúci pohľad na rôzne oblasti matematiky, no neraz ich aj obohacuje o nové metódy a zaujímavé matematické poznatky. Počínajúc kapitolou o *logike prvého rádu* sa budeme venovať práve takejto logike.

Trocha histórie

Vopred upozorňujeme čitateľa, že náš stručný prehľad dejín logiky si nijako nečiní nárok na úplnosť a autor si je vedomý toho, že by bolo márne sa o také niečo pokúšať. Naše ciele sú podstatne skromnejšie: aspoň kaleidoskopicky predstaviť logiku v jej vývoji ako súčasť podnes živého prúdu európskej kultúry a vzdelanosti prameniaceho v časoch dávno minulých a vinúceho sa ľudskou históriou až do súčasnosti.

Starovek

Logika – podobne ako klasická geometria – je jedným z plodov gréckeho zázraku. Zárodky logiky síce možno nájsť aj v myslení starovekej Číny a Indie, ale ani zďaleka nedosahujú úroveň, na akú bola logika povznesená v antickom Grécku. Samotné slovo *logika* je odvodené z gréckeho slova *logos* ($\lambda o \gamma o \varsigma$), ktoré znamená jednak *slovo*, jednak *reč*, no taktiež *usporiadanie* či *poriadok* (česky *řád*) ako opak *chaosu*, či dokonca princíp tvoriaci svet jeho vymanením z chaosu. V podobnom význame je slovo *Slovo* použité aj v úvodnej vete Jánovho evanjelia, ktoré celé nesie zreteľnú pečať helenistického vplyvu: *Na počiatku bolo Slovo, to Slovo bolo u Boha, a to Slovo bolo Boh.*

Logika ako uvedomelá súčasť ľudského poznania reflektujúca prejavy ľudského myslenia v jazyku však nemohla vzniknúť skôr, než sa myslenie a jazyk stali logickými. Inak povedané logika sa najprv musela konštituovať v rámci jazyka ako tá „*vnútorná štruktúra, skôr tušená než zjavná, ktorá však danej veci* [...], *či argumentácii dáva zmysel alebo zaň preberá záruku*,“ a až potom mohla byť objavovaná a postupne začať nadobúdať podobu „*normatívnej vedeckej disciplíny, ktorá skúma formu, štruktúru a zákony správneho (t. j. logického) myslenia a usudzovania, tak ako sa prejavujú v jazyku,* [...] *abstrahujúc pritom od obsahu konkrétnych myšlienok a úsudkov.*“ Môžeme len špekulovať, čo všetko prispelo k objavu logiky v prvom z uvedených významov a ku vzniku logiky v druhom význame. Do akej miery to bola politická organizácia demokratických gréckych *polis*, rozvoj obchodu, právneho systému, filozofie a matematiky, v rámci ktorých sa nielen kultivuje logické myslenie a umenie argumentácie, no taktiež vzrastá úcta k týmto schopnostiam a vzniká dopyt po ľuďoch v nich zbehlých, schopných napr. zastupovať jednotlivé stránky v právnych sporoch či vyučovať iných tomuto umeniu. Zrejme to všetko malo na zrode logiky svoj podiel. Bolo by však naivné očakávať, že sa nám podarí podať dostatočne presvedčivé vysvetlenie pomocou čisto racionálnych dôvodov.

Ľuďom, ktorí sa zaoberali vyučovaním rétoriky ako rečníckeho umenia a umenia argumentácie, sa hovorilo *sofisti*, čo približne znamená *učitelia múdrosti.* Sofisti sa často nechávali najímať ako zástupcovia v právnych sporoch. Ich cieľom teda vo všeobecnosti bolo presvedčiť oponenta o správnosti svojho názoru. To ich viedlo k analýze jazyka a odhaľovaniu jeho vnútornej štruktúry, ktorá odlišuje všeobecne platné argumenty od tých ostatných. Sofisti takto odhalili a používali *zákon sporu*, *zákon vylúčenia tretieho* a pod. Utilitárny charakter ich profesie však spôsobuje, že ich logika sa dostáva do područia *eristiky*, čo možno voľne preložiť ako umenie viesť spor. Dôležitejším než hľadanie pravdy alebo správnosť úsudkov sa stáva vyvrátenie či aspoň spochybnenie argumentov protivníka, a taktiež tvorba zdanlivo logicky správnych argumentov, ktoré vedú k želaným záverom a je ťažké ich vyvrátiť. Zároveň, ako vedľajší produkt slúžiaci najmä na pobavenie publika, sa objavuje množstvo naoko správnych argumentov tzv. *sofizmov*, vedúcich k absurdným záverom. Niektoré sofizmy však nadobudli charakter *paradoxov*, naznačujúcich hranice možností logiky a pojmového uchopenia sveta v jazyku vôbec. Ukážme si niekoľko príkladov.

Sofizmus *Rohatý*, pripisovaný Eubulidovi z Milétu (4. stor. p. n. l.):
Čo si nestratil, máš.
Nestratil si rohy.
Teda máš rohy.

Samotná úvaha je z logického hľadiska správna. Očividne nepravdivý je však prvý predpoklad. Preto by nemalo prekvapiť, že ani záver nie je pravdivý.

Sofizmus pripisovaný bratom Euthydémovi a Dionýzodorovi (5. stor. p. n. l.):

Tento pes je tvoj.
Tento pes je otec.
Teda tvoj otec je pes.

Tu je chyba menej očividná. Slová *otec* a *pes* tu vystupujú v dvoch odlišných rolách. Jednak označujú vlastnosť „byť otcom“, resp. „byť psom“, jednak konkrétnu osobu (tvoj otec) resp. konkrétneho psa (tento pes). Trik spočíva v tom, že tieto dvojaké roly sa zámerne nerozlišujú. Označme $O(x)$ vlastnosť (predikát) „byť otcom“, $P(x)$ vlastnosť „byť psom“ a $T(x)$ a vlastnosť „patriť tebe“ (t. j. adresátovi úvahy). Nech ďalej o označuje tvojho otca a p tohto psa. Uvedená úvaha má potom tvar

$T(p)$
$O(p)$
Teda $P(o)$

Takáto úvaha nie je logický platná, lebo jej predpoklady (čo aj pravdivé) nevypovedajú nič o objekte o vyskytujúcom sa v závere. Úvahu nemožno zachrániť ani pridaním ďalších troch pravdivých premís $O(o)$, $T(o)$ a $P(p)$, ktoré sú v úvahe zamlčané, no v jej psychologickom účinku sa s nimi počíta. Žiadna z uvedených premís totiž neustanovuje akýkoľvek vzťah medzi uvažovanými predikátmi $O(x)$, $P(x)$ a $T(x)$.

Nasledujúci sofizmus, pripisovaný asi najznámejšiemu zo sofistov Protagorovi z Abdér (okolo 485–410 p. n. l.), však už žiadne jednoduché riešenie nemá.

Paradox Protagorovho žiaka. Istý mladý muž nastúpil k Protagorovi do učenia. Podľa dohody mal svojmu učiteľovi zaplatiť odmenu až po ukončení štúdia, keď vyhrá svoj prvý súdny spor. Mladík štúdium ukončil, avšak žiadny spor neviedol, a tak podľa dohody ani nesplácal odmenu svojmu majstrovi. Napokon Protagorovi došla trpezlivosť, vyzval študenta, aby zaplatil, a pohrozil mu súdnou žalobou. K tomu na vysvetlenie dodal: „Súd Ťa k zaplateniu odmeny buď odsúdi alebo neodsúdi. V prvom prípade budeš musieť zaplatiť na základe rozhodnutia súdu, v druhom podľa našej dohody, pretože si vyhral svoj prvý spor.“ Žiak dobre vyškolený samotným Protagorom sa však nezľakol a odvetil: „Nezaplatím ani v jednom prípade. Keď ma súd odsúdi k zaplateniu, tak som svoj prvý spor nevyhral, preto podľa našej dohody nezaplatím. Keď ma súd k zaplateniu neodsúdi, nezaplatím na základe rozhodnutia súdu.“

Ďaleko najslávnejším sofizmom je však *Paradox klamára*, známy aj ako *Epimenidov paradox*, pripisovaný opäť Eubulidovi. V ňom Kréťan Epimenides prednesie výrok:

„*Všetci Kréťania sú klamári.*“

Týmto paradoxom sa budeme podrobnejšie zaoberať až v kapitole venovanej Gödelovým vetám o neúplnosti.

Ďalším zdrojom logiky, spočiatku nazývanej *dialektikou*, je grécka filozofia. V jej rámci sa postupne vynára a presadzuje názor, že základným poslaním filozofie je odlíšiť zdanie od skutočnosti a získať o svete isté a nepochybné poznanie. To predovšetkým znamená spoznať poriadok sveta (*logos*), teda to, čo je vo svete stále a nemenné. Jednotlivé úkazy a veci sú naopak premenlivé, dočasné a nestále. Preto treba cez javy preniknúť k ich podstatám a za zmenami odhaliť ich zákonitosti a z nich potom spätne vyložiť i zmeny, ktorým podliehajú. Zdrojom takého poznania však nemôžu byť zmysly, ktoré nás často klamú, ani naša každodenná skúsenosť. Tá môže naše uvažovanie síce podnietiť, ale k pravému poznaniu môžeme dospieť len po ceste myslenia a rozumu.

Táto tendencia sa prejavuje už v predsokratovskej filozofii, najmä u Parmenida (okolo 540–470 p. n. l.) a jeho nasledovníkov, príslušníkov školy, ktorú založil v meste Elea na juhu Itálie. Parmenides vykladá svet ako jediné nemenné a večné súcno, ktorému hovorí *Bytie* alebo *Jedno*. Toto Bytie *je* a *je* len Jedno a ne-Bytie *nie je*. Pri všetkej úcte, na súčasníka to celé pôsobí ako jedna nafúknutá znáška tautológií, až má človek problém brať to vážne.

Na podporu učenia svojo majstra vypracoval jeho žiak Zenón (okolo 490–430 p. n. l.) dômyselný súbor úvah, známych ako *Zenónove apórie*, dokazujúcich nemožnosť pohybu. Zenón zakaždým pripustí, že dochádza k pohybu a na základe tohto predpokladu (spolu s dodatočnými predpokladmi, na ktoré ešte upozorníme) dospieva k sporu v podobe absurdného dôsledku, z čoho vyvodzuje záver o nemožnosti pohybu. Uvedomme si, že ide o záver protirečiaci bežnej skúsenosti, jeho presvedčivosť preto spočíva výlučne na nezvratnosti použitých logických argumentov. Ide zrejme o najstarší doložený príklad argumentácie tohto druhu. Navyše svojím nástojčivým poukazom na spornosť pojmového uchopenia pohybu predstavujú Zenónove apórie permanentnú výzvu v antickom duchu zrodenej vede – matematike, fyzike a filozofii zvlášť –, ktorá ani časom nestratila na aktuálnosti. Napokon, nech čitateľ posúdi sám.

Dichotómia. Nejestvuje žiaden pohyb, lebo to, čo sa pohybuje, musí najprv dospieť do polovice cesty, skôr než dospeje do konca. Ale aby to dospelo do polovice cesty, musí to ešte predtým dospieť do polovice tejto polovice, atď. Takže pohyb sa ani nemôže začať.

Achilles a korytnačka. Achilles, najrýchlejší z ľudí, nemôže dobehnúť korytnačku, najpomalšiu z tvorov, ak sa vydala na cestu pred ním. Najprv by totiž prenasledovateľ musel dospieť do miesta, odkiaľ unikajúci vyrazil, potom do miesta, kde bol unikajúci v okamihu, keď prenasledovateľ dospel do východiskového bodu, atď. Takže pomalá korytnačka bude pred rýchlonohým Achillom vždy o určitý úsek popredu.

Letiaci šíp. Pripusťme, že všetko v každom okamihu sa nachádza na svojom mieste a je buď v kľude alebo v pohybe. Ak sa letiaci šíp nachádza v každom okamihu na svojom mieste, tak je v každom jednotlivom okamihu nehybný, teda sa nemôže pohybovať. Ak by sa totiž v nejakom okamihu pohyboval, nebol by v tomto okamihu na svojom mieste, teda nebol by vlastne nikde.

Štadión. Nech sa dva rady, pozostávajúce z rovnakého počtu rovnako veľkých telies, pohybujú po pretekárskej dráhe štadióna oproti sebe rovnakými rýchlosťami. Ak pripustíme, že pohyb sa odohráva zmenami polohy o rovnaké malé, ďalej už nedeliteľné dĺžkové jednotky v rovnako krátkych, ďalej už nedeliteľných jednotkových okamihoch, tak v okamihu, za ktorý sa posunie prvý rad voči štadiónu o jednotku, druhý rad sa tiež posunie voči štadiónu o jednotku, lenže v opačnom smere. Jeden rad sa tak vzhľadom na druhý posunie za ten istý čas o dve jednotky. Teda dve dĺžkové jednotky sa rovnajú jednej jednotke a dva jednotkové časové okamihy sa rovnajú jednému takému okamihu.

Všimnite si, že v prvých dvoch apóriách Zenón vychádza z predpokladu neohraničenej deliteľnosti priestoru a času, kým v druhých dvoch vychádza z opačného predpokladu, že priestor a čas sa skladajú z najmenších ďalej už nedeliteľných častí (hoci explicitne je tento predpoklad vyslovený len v *Štadióne*). Zatiaľ čo prvá a tretia apória ukazujú nemožnosť absolútneho pohybu, druhá a štvrtá vyvracajú možnosť pohybu relatívneho.

Na rozdiel od sofistov, u ktorých prevláda poňatie logiky ako *eristiky*, t. j. umenia viesť spor s cieľom vyvrátiť stanovisko protivníka, rozvíja sa aj tzv. *dialektická logika* ako umenie viesť dialóg s cieľom spoločne hľadať pravdu. Neprekonateľným majstrom v tomto umení je Sokrates (469–399 p. n. l.), jedna z najvplyvnejších osobností západného myslenia, vynárajúca sa na jeho úsvite. V sokratovských dialógoch, tak ako nám ich podáva Sokratov žiak Platón (427–348 pred n.l), sa typicky hľadá odpoveď na otázku položenú Sokratom alebo niektorým z jeho hostí, medzi ktorými je obvykle aj uznávaný odborník na daný problém. Prvá odpoveď zvykne zodpovedať všeobecne prijímanému názoru. Sokrates sa potom dožaduje podrobnejšieho vysvetlenia a žiada od návštevníkov jasné definície používaných pojmov. Ako kladie ďalšie otázky, návštevník vo svojich odpovediach obvykle dospeje k názoru, ktorý protirečí jeho pôvodnému stanovisku. Ak sa spločnosť zhodne a prijme tento nový názor, Sokrates ho svojimi otázkami opäť spochybní. A táto schéma sa opakuje viackrát. Občas majú účastníci pocit, že sa postupne približujú k pravde, častejšie si však uvedomujú, že len hlbšie spoznávajú vlastnú nevedomosť, ku ktorej sa od začiatku hlási aj samotný Sokrates.

Prvá grécka filozofická škola zameraná na logiku (nazývanú dialektikou) vznikla v gréckom meste Megara na polceste medzi Aténami a Korintom. Jej zakladateľ, Euklides z Megary (okolo 435–365 p. n. l.), často zamieňaný s Euklidom z Alexandrie, autorom *Základov*, bol žiakom Sokrata a ctiteľom Zenóna. Patril k nej aj už spomínaný Eubulides z Milétu, autor viacerých známych sofizmov a paradoxov. S ňou úzko spriaznená bola aj tzv. dialektická škola reprezentovaná Diodorom Kronom (? – asi 284 p. n. l.) a Filónom z Megary (3. stor. p. n. l.). Diela megarikov ani dialektikov sa nedochovali, vieme o nich len sprostredkovane zo spisov iných autorov, napr. z Platónovho dialógu *Theaitétos*, ktorý je považovaný za pôvodne Euklidovo dielo. Vie sa, že megarici o.i. obohatili eristiku o metódu vyvodzovania absurdných záverov zo stanovísk, ktoré chceli spochybniť či vyvrátiť. Filón sa údajne dopracoval k chápaniu implikácie vo význame zhodnom so súčasným.

Základy logiky ako vedeckej disciplíny však položil až Aristoteles zo Stageiry (384 až 322 p. n. l.) vo svojom päťzväzkovom diele od stredoveku súborne označovanom ako *Organon* (t. j. *Nástroj*). Obsah jeho jednotlivých častí možno stručne a zjednodušene zhrnúť takto:

Kategórie zavádzajú klasifikáciu jednoduchých pojmov (podstatných mien), ktoré môžu byť subjektom resp. predikátom nejakých tvrdení, do desiatich typov (kategórií).

O vyjadrovaní je rozborom kategoriálnych tvrdení na jednoduché pojmy a základné zložky ich logickej štruktúry ako negácia a protiklad, obrátenie (konverzia) ako aj znaky kvantity. S využitím subjekt-predikátových premenných je tu podaný náznak „kombinatorickej analýzy“ možných typov kategorických sylogizmov. Taktiež sa tu objavujú úvahy o možnosti, náhodilosti a nevyhnutnosti ako aj o platnosti výpovedí o budúcnosti, čiže zárodky modálnej a temporálnej logiky.

Prvé analytiky sú formálnym rozborom podmienok zaručujúcich správnosť logicky platných úsudkov (kategorických sylogizmov).

Druhé analytiky sa zaoberajú dôkazmi tvrdení, definíciami pojmov a klasifikáciou vedeckých poznatkov. Zatiaľ čo v *Prvých analytikách* sa kladie dôraz na formálny aspekt sylogistickej logiky, v *Druhých analytikách* sú logické úvahy analyzované najmä z hľadiska ich obsahu. Sú tu rozlíšené tzv. *apodiktické sylogizmy*, ktorých premisy sú isté a pravdivé, teda prinášajú aj pravdivé a isté závery, a tzv. *dialektické sylogizmy*, ktorých premisy, teda aj závery sú neisté.

Topiky podrobnejšie skúmajú dialektické dôkazy a snažia sa stanoviť stupeň ich vierohodnosti. Sylogizmy, ktoré budia klamný dojem správnosti, či už z hľadiska formy alebo obsahu, sa nazývajú sofistické. Dodatok *O sofistických dôkazoch* (často uvádzaný ako samostatný šiesty diel) je venovaný odhaľovaniu a kritike chýb, ktoré sa v nich ukrývajú. Je tu klasifikovaných trinásť typov klamných argumentov.

Z hľadiska nášho kurzu je najdôležitejšie štúdium kategorických sylogizmov, ktoré preniká celým *Organonom*. Kategorický sylogizmus je v úvode *Topikov* definovaný ako *„reč (logos), v ktorej, ak je niečo dané, niečo rôzne od toho, čo je dané, vyplýva práve tým, že dané jest"*. I keď z dnešného hľadiska je Aristotelova náuka o kategorických sylogizmoch púhym fragmentom monadickej logiky prvého rádu (t. j. logiky unárnych predikátov), tendencie označiť ju na základe toho za triviálnu, objavujúce sa z času na čas od začiatku 20. storočia, sú len dokladom nepochopenia a nedocenenia epochálneho významu kroku, ktorý tento veľký antický mysliteľ a polyhistor učinil ako prvý.

Na Aristotela nadväzujú jeho nasledovníci, príslušníci ním založenej peripatetickej školy, ktorí obohatili jeho sylogistiku napr. o štúdium foriem hypotetických úsudkov. Z nich najvýznamnejší sú Theofrastos z Eresu na Lesbe (okolo 372–287 p. n. l.), považovaný za zakladateľa botaniky a dendrológie, a Eudémos z Rhodu (okolo 370–300 p. n. l.), známy aj ako vydavateľ Aristotelových diel a historik gréckej matematiky a astronómie.

Aristotelom a peripatetikmi je ovplyvnená aj stoická škola pôsobiaca na Cypre, ktorej najvýznamnejšími predstaviteľmi boli Zenón z Citia (okolo 334–262 p. n. l.) a Chrysippos zo Soloi (282–206 p. n. l.). Hoci stoicizmus je predovšetkým filozofia morálnych zásad a životných postojov (spomeňme napr. príslovečný stoický kľud), stoickí myslitelia vniesli nezanedbateľný vklad aj do rozvoja logiky. Kým Aristotelova logika sa primárne zaoberá analýzou vzťahu vyplývania medzi subjekt-predikátovými výpoveďami, v stoickej logike sú položené základy výrokového počtu. *Výrok* je chápaný ako zmysluplná výpoveď, ktorá je buď pravdivá alebo nepravdivá. Z daných výrokov možno tvoriť nové pomocou logických spojok negácie, konjunkcie, disjunkcie (chápanej vo vylučovacom zmysle) a implikácie. Práve *implikácia* hrá v stoickej logike zásadnú úlohu, pričom (podobne ako u Filóna) je chápaná vo význame, aký jej prisudzujeme podnes: výrok $A \Rightarrow B$ je nepravdivý jedine v tom prípade, keď jeho predpoklad A je pravdivý a záver B nepravdivý. Popri tom sa uvažuje aj o implikácii (vyplývaní) vo význame *pravdivého úsudku*, t. j. úsudku, v ktorom je z pravdivých premís logicky správne odvodený záver, čím je automaticky zaručená jeho pravdivosť. Stoici objavili a zosystematizovali viacero odvodzovacích pravidiel, ktoré formulovali s použitím radových čísloviek v úlohe výrokových premenných. Na ilustráciu uvádzame štyri ukážky pod názvami, ktoré dostali v stredoveku, kvôli prehľadnosti zapísané s použitím súčasnej notácie:

z $A \Rightarrow B$ a A odvoď B (modus ponens)

z $A \Rightarrow B$ a $\neg B$ odvoď $\neg A$ (modus tollens) z $\neg(A \wedge B)$ a A odvoď $\neg B$ (modus ponendo tollens)

z $(A \wedge B) \Rightarrow C$, A a $\neg C$ odvoď $\neg B$ (pravidlo antilogizmu)

Pomocou svojho deduktívneho systému stoici tiež analyzovali známe antické paradoxy a sami objavili či vytvorili rad ďalších. Z pôvodných spisov gréckej stoickej školy sa toto veľa nezachovalo, vieme o nich najmä z diela Diogena Laertia *Životy a názory významných gréckych filozofov* napísaného v 3. storočí n. l. Stoická škola však našla pokračovanie v starom Ríme. Hlásili sa k nej napr. Lucius Annaeus Seneca (4 p. n. l. až 65 n. l.), Marcus Aurelius (121–180 n. l.) a do istej miery aj Marcus Tullius Cicero (106–43 pred n l.). Logika však už nebola v centre ich záujmu.

Aristotelovu sylogistiku i výrokovú logiku stoikov významne obohatil aj slávny antický lekár a anatóm Galénos (okolo 130–200 n. l.). Vo svojom *Úvode do logiky* Galénos rozlišuje disjunkciu vo vylučovacom zmysle (buď ... alebo ...) a alternatívu v nevylučovacom zmysle (... alebo ...), ako aj implikáciu a obojstrannú implikáciu (ekvivalenciu). Taktiež študuje otázku vzájomnej zameniteľnosti (t. j. logickej ekvivalencie) formálne rôznym spôsobom utvorených výrokov, čím vlastne predjíma pojem tautológie. Zároveň uňho nachádzame zárodky logiky dvojmiestnych predikátov, t. j. binárnych relácií, u ktorých si všíma napr. možnosť obrátenia (inverzie) a otázky symetrie. V logických úsudkoch pripúšťa tiež premisy tvorené konjunkciou viacerých jednoduchých predpokladov. Nadobudnuté logické poznatky aplikuje napr. pri svojich analýzach anatomických popisov a liečebných postupov.

Logika v staroveku sa však nerozvíjala iba v rámci antickej filozofie, na pôde ktorej sa postupne osamostatňovala. Nemenej dôležitý vklad do logiky predstavuje aj grécka matematika, v rámci ktorej sa umenie argumentácie rozvíja a kultivuje zásadným spôsobom. Toho vrcholnou ukážkou je trinásťzväzkové dielo Euklida z Alexandrie *Základy* ($\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$) napísané niekedy na prelome 4. a 3. storočia p. n. l. V nich sú uceleným spôsobom zhrnuté a vyložené poznatky takmer celej dovtedy známej matematiky: rovinnej i priestorovej geometrie a aritmetiky. Najmä prvých šesť dielov venovaných planimetrii sa stalo na dlhé stáročia vzorom pre výstavbu akýchkoľvek deduktívnych teórií ašpirujúcich na exaktnosť.

Euklides začína dvadsiatimi tromi *definíciami* základných pojmov (bod, čiara, priamka, uhol, kruh, ...) opierajúc sa pritom o geometrický názor vyostrený pohľadom do ideálneho geometrického sveta. Ďalej stanovuje päť *postulátov.* Prvé tri postuláty možno chápať ako pokyny na riešenie najjednoduchších konštrukčných úloh (spojiť dva body priamkou, ľubovoľne predĺžiť danú usečku, narysovať kružnicu s daným stredom a polomerom). Ďalšie dva postuláty majú skôr charakter axióm: všetky pravé uhly sú si rovné; slávny piaty postulát v pôvodnom znení hovorí, že dve priamky preťaté treťou priamkou sa pretnú na tej strane, kde je súčet ich uhlov s treťou priamkou menší než dva pravé. Nasleduje deväť *axióm*, ktoré majú charakter pokynov k evidencii (nahliadnutiu) či jednoduchých metodologických zásad (veličiny rovné tomu istému sú si rovné, keď sa pridajú veličiny rovné k rovným aj celky sú si rovné, ... , celok je väčší než jeho časť). Z týchto základných pojmov a predpokladov Euklides prísne logicky odvodzuje ďalšie poznatky. Logika *Základov* však nie je samostatná disciplína ale majstrovsky používaný, i keď explicitne nešpecifikovaný nástroj. Táto logika nijako nenahrádza geometrický názor, ale z neho vychádza a ďalej mu slúži tým, že ho podporuje, dopĺňa a rozvíja.

Považuje sa za nepochybné, že Euklides poznal Aristotelovo dielo, vrátane jeho sylogistiky, ako aj logické spisy stoikov. Vo svojich *Základoch* sa však na ne nijako nedvoláva. Na druhej strane, logika, ktorú používa, je zreteľne bohatšia než aristotelovská či stoická logika: pri spätnom pohľade ju možno považovať za pomerne rozsiahly fragment logiky prvého rádu, bez obmedzenia sa na jednomiestne predikáty.

Euklidove *Základy* hlboko ovplyvnili a inšpirovali Mikuláša Kopernika (1473–1543), Galilea Galileiho (1564–1642), Johannesa Keplera (1571–1630), René Descarta (1596 až 1650) či Isaaca Newtona (1643–1727). Euklidova axiomatická metóda poslúžila za vzor aj Baruchovi Spinozovi (1632–1677) pre jeho najvýznamnejšie filozofické dielo *Ethica ordine geometrico demonstrata*. V ňom logicky vyvodzuje metafyzické, teologické a etické závery z vopred stanovených definícií a axióm. Hneď po *Biblii* sú *Základy* najprekladanejším a najvydávanejším knižným dielom všetkých čias.

Našu galériu antických logikov uzatvára ranokresťanský rímsky filozof Anicius Manlius Severinus Boëthius (asi 480–524 n. l.). Boëthius sprostredkoval stredovekej Európe plody antickej filozofie prekladmi diel Platóna, Aristotela a ďalších filozofov gréckej antiky do latinčiny. K viacerým z nich, napr. k Aristotelovým logickým spisom, napísal tiež podrobné komentáre. K logike prispel aj vlastnými dielami, najmä *O kategorickom sylogizme* a *O hypotetickom sylogizme*. V nich sa pokúsil o syntézu Aristotelovej kategoriálnej sylogistiky a stoickej výrokovej logiky. Taktiež v nich podáva podrobnú kombinatorickú klasifikáciu formálnej štruktúry rôznych typov úsudkov. Jeho logika, založená na štrukturálnej analýze latinského jazyka, výrazne ovplyvnila stredoveké myslenie a položila základy vplyvu Aristotelovho diela na scholastickú filozofiu a logiku.

Stredovek

Logika v stredoveku je pestovaná ako jedno zo *siedmich slobodných umení*. Tie zahŕňali tzv. *trívium*, t. j. tri slovesné umenia [gramatika, rétorika a logika (spájaná s filozofiou a nazývaná tiež dialektikou)] a tzv. *kvadrívium*, t. j. štyri číselné umenia [aritmetika, geometria, astronómia (spolu s astrológiou) a hudba (vrátane náuky o proporciách a harmónii)]. Už z tohto jej zaradenia je zrejmé, že stredoveká logika je oddelená od matematiky a príliš sa s ňou nezbližuje.

Vo vývoji stredovekej logiky možno vyčleniť tri obdobia. Prvé obdobie, nazývané tiež *stará logika* (*logica vetus*), siahá od konca antiky približne do polovice 12. storočia. Dostupnosť antických prameňov v tomto období je obmedzená na dve Aristotelove diela (*Kategórie* a *O vyjadrovaní*) s príslušnými Boëthiovými komentármi. Najvýznamnejším predstaviteľom „starej logiky“ je francúzsky scholastický filozof, logik, teológ, básnik a hudobný skladateľ Pierre Abélard (1079–1142).

Druhé obdobie, nazývané *nová logika* (*logica nova*), trvá približne od polovice 12. do konca 13. storočia. V tomto období je študované a komentované celé Aristotelovo dielo a ďalšie antické zdroje. Je dovŕšená kmbinatorická klasifikácia kategorických sylogizmov aj odvodzovacích pravidiel výrokovej logiky. Značná pozornosť je venovaná otázkam modálnej a temporálnej logiky. Objavuje sa tiež viacero učebníc logiky a ustaľuje sa niečo ako ich kanonická podoba. K najvýznamnejším predstaviteľom „novej logiky“ patria cirkevní učenci Albert Veľký (asi 1193–1280), Peter Hispánsky (?–1277), John Duns Scotus (1265/6–1308) a ďalší.

Tretie obdobie, nazývané *moderná logika* (*logica modernorum*), zaberá približne celé 14. a 15. storočie. Je charakterizované najmä ďalším zdokonaľovaním a systematizáciou metód a výsledkov predošlého obdobia a ich využívaním pri analýze stredovekej latiny. Študujú sa tiež antické paradoxy a hľadajú sa možnosti ich riešenia; popritom sa objavujú ďalšie. K najvýznamnejším predstaviteľom „modernej logiky“ patria William Occam (Ockham) (1287–1347), Jean Buridan (asi 1300–1360), Albert Saský (1320–1390), Paolo Venetus (?–1429) a ich žiaci.

Popri rozvoji ako samostatná disciplína sa logika v stredoveku cibrí aj vo filozofických a teologických dišputách a sporoch. K typickým otázkam, ktoré sa v nich riešia, patrí napr. otázka vzťahu predurčenia a slobodnej vôle a s ňou súvisiace otázky zodpovednosti človeka za vlastné činy a jeho možnosti ovplyvniť svojim konaním vlastnú spásu. Ďalej je to otázka logickej zlučiteľnosti božských atribútov (je napr. známe, že Božia vševedúcnosť a všemohúcnosť sú v spore), otázka možnosti dokázať Božiu existenciu logickými prostriedkami z princípov čistého rozumu, otázka, ako môže dobrotivý, milosrdný a zároveň všemohúci Boh pripustiť existenciu zla v ním stvorenom svete, otázka, čo bolo, resp. kde bol a čo robil Boh pred stvorením sveta, atď. Logika hrala dôležitú úlohu aj v metafyzickom spore medzi *realizmom* a *nominalizmom* o charakter *univerzálií*. Kým realizmus zastáva stanovisko, že univerzálie (všeobecné pojmy označujúce idey či vlastnosti a vzťahy, ako napr. *dobro*, *zlo*, *krása*, *priateľstvo*, *veľkosť*, a pod.) majú reálne samostatné bytie, podľa nominalizmu sú univerzálie iba mená či názvy niektorých abstraktných ideí, vlastností a vzťahov, ktorým však nezodpovedajú žiadne samostatne existujúce reálne objekty. Sotva koho prekvapí, že ani jeden zo spomínaných problémov sa k všeobecnej spokojnosti vyriešiť nepodarilo.

V protiklade k tvorivému príspevku všestranne vzdelaných stredovekých učencov k rozvoju logiky a ich brilantným dišputám stojí *výuka* logiky v stredoveku a ešte dlho potom. Tá sa do značnej miery redukuje na *memorovanie* odvodzovacích pravidiel a kategorických sylogizmov, čím popiera svoj vlastný zmysel, ktorým by mala byť kultivácia logického myslenia. A tak sa, paradoxne, najznámejšími a najrozšírenejšími výsledkami stredovekej logiky stávajú rozmanité *mnemotechnické pomôcky*: *logický štvorec*, známy aj ako *štvorec opozít*, v ktorom sú prepojené štyri typy subjekt-predikátových súdov, či mnemotechnické kódy devätnástich sylogizmov rozdelených do štyroch figúr (I: Barbara, Celarent, Darii, Ferio; II: Cesare, Camestres, Festino, Baroco; III: Darapti, Disamis, Datisi, Felapton, Bocardo, Ferison; IV: Bramalip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison).

Úloha. Vyhľadajte na internete informácie o *logickom štvorci*, štyroch základných figúrach kategorických sylogizmov a mnemotechnických kódoch jednotlivývh sylogizmov. Na základe významu kódových samohlások a, e, i, o zrekonštruujte slovnú podobu sylogizmov zodpovedajúcich uvedeným 19 kódom a zapíšte ich pomocou stredovekej i súčasnej notácie. Napr. sylogizmus Ferio má slovné vyjadrenie

žiadne M nie je P a niektoré S sú M, preto niektoré S nie sú P

a v stredovekej resp. v modernej notácii vyzerá nasledovne:

z $M\,e\,P$ a $S\,i\,M$ odvoď $S\,o\,P$
resp.

z $(\forall x)(M(x) \Rightarrow \neg P(x))$ a $(\exists x)(S(x) \wedge M(x))$ odvoď $(\exists x)(S(x) \wedge \neg P(x))$

Odhaľte tiež význam začiatočných písmen B, C, D, F a spoluhlások m, p, r, s v názvoch jednotlivých kódov (obsahujú návod, ako možno ten ktorý kód druhej až štvrtej figúry odvodiť z príslušného kódu prvej figúry).

Renesancia a novovek

Renesančné myslenie sa stavia k scholastike a stredovekému arsitotelizmu značne kriticky. Špekulatívna filozofia a teológia strácajú na význame a do popredia sa dostáva pozorovanie prírody a experiment. Postupne sa presadzuje snaha, reprezentovaná najmä Galileom Galileim, vysvetliť prírodné javy a deje kauzálnym spôsobom, odhaliť ich zákonitosti, a to nielen ich kvalitatívne no taktiež ich kvantitatívne aspekty, a tie popísať jazykom matematiky. V tejto atmosfére sa i na stredovekú logiku aspoň na istý čas hľadí s dešpektom ako na jalové mudrovanie a nekonečné omielanie banálnych poučiek. Zmenu pohľadu prináša až novovek, menovite René Descartes, ktorý si uvedomuje, akú dôležitú metodologickú úlohu hrá logika v racionalistickej filozofii. Dokladom toho sú najmä jeho pojednania *Rozprava o metóde* (1637) a *Pravidlá na vedenie rozumu* (napísané r. 1628, vydané však až r. 1701). Descartova *Rozprava* a jeho *Pravidlá*, spolu s názormi Blaise Pascala (1623–1662), do veľkej miery ovplyvnili aj Antoina Arnaulda (1612–1694) a Pierra Nicola (1625–1695) pri písaní učebnice *Logika čiže umenie myslieť* (vydanej najprv anonymne v Paríži r. 1662), známejšej pod názvom *Logika z Port-Royal*, podľa pôsobiska jej autorov, kláštora Port-Royal de Champs. Aristotelovská logika v podobe, akú nadobudla v neskorom stredoveku, je v nej vyložená v duchu karteziánskeho dualizmu. V súlade s tým je prezentáciacia materiálu verbálna, bez využitia symboliky. V sémantike autori rozlišujú *obsah* (*intenziu*) a *rozsah* (*extenziu*) pojmu. Zároveň však do logiky vnášajú psychologizujúce hľadisko. Jej zmysel vidia nie v nej samej, ale v jej osvietensky poňatej úlohe pomôcť presadiť vo svete rozum a spravodlivosť. Kniha sa v pomerne krátkom čase dočkala prekladov do viacerých jazykov. Až do 19. storočia bola najvydávanejšou učebnicou logiky v Starom aj v Novom svete.

Osobitné postavenie v našom príbehu má významný polyhistor (matematik, filozof a diplomat) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Leibniz ako matematik je (popri Newtonovi) známy najmä ako jeden z tvorcov infinitezimálneho počtu. Jeho prístup sa zakladal na využití nekonečne malých (a nekonečne veľkých) veličín; ním zavedené označenie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pre deriváciu a $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ pre integrál sa používa dodnes. Leibniz si tiež dopisoval s práve spomínaným Arnauldom. Svoj cit pre prácu so symbolmi prejavil aj pri návrhu logickej notácie, ktorá však nebola publikovaná za jeho života, a keď na prelome 19. a 20. stor. k tomu došlo, bola už prekonaná, takže dovtedajší vývoj nestihla a ďalší nedokázala ovplyvniť.

Leibniz však ovplyvnil vývoj európskeho myslenia, najmä logiky, aj svojou víziou nadväzujúcou na katalánskeho stredovekého mystika Ramóna Lulla (1232–1316). Lull je tvorcom systému tabuliek a diagramov *Ars Magna*, ktorý mal umožniť v symbolickej podobe zhromaždiť univerzálne východiskové princípy poznania a z nich mechanickými kombináciami podľa logických pravidiel odvodzovať ďalšie (potenciálne všetky) poznatky. V rámci toho by sa malo podariť – mimo každú pochybnosť – dokázať aj dogmy kresťanskej teológie. Leibniz zdieľal Lullovu predstavu o objavovaní právd vyčerpávajúcim spôsobom tvorbou tvrdení vhodnými kombináciami pojmov. Jeho pojednanie *De arte combinatoria* (1666) obsahuje náčrt tohto „projektu“. Podobné projekty kruto paroduje Jonathan Swift (1667–1745) v tretej z *Gulliverových ciest* (1726), v jednej zo scén Gulliverovej návštevy Veľkej Akadémie v Lagado.

Leibniz neskôr pojal zámer vypracovať *univerzálny charakteristický jazyk* (*lingua characteristica universalis*), v ktorom by základné pojmy boli reprezentované číslami alebo inými pre ne charakteristickými symbolmi a zložitejšie pojmy súbormi symbolov zodpovedajúcich jednoduchším pojmom, z ktorých pozostávajú, tak, aby takto vzniknuté grafické útvary boli ľahko uchopiteľné a zrozumiteľné čitateľom bez ohľadu nato, akým jazykom hovoria. Inšpiráciou mu boli egyptské hieroglyfy a čínske obrázkové písmo, ako aj algebraická symbolika, ktorú zaviedol francúzsky matematik François Viète (1540 až 1603). Ďalej hodlal rozpracovať tzv. *calculus ratiocinator*, univerzálny „rozumový kalkul“ umožňujúci výpočty s pojmami a tvrdeniami zostavenými zo znakov univerzálnej charakteristiky, ako aj tzv. *ars iudicandi*, t. j. metódu, pomocou ktorej by bolo možné rozhodnúť o pravdivosti či nepravdivosti každého takto symbolicky reprezentovaného tvrdenia.

Ciele, ktoré tým Leibniz sleduje, nie sú nijako skromné. Pokrok všetkých vied, medzi nimi i matematiky, by bol len jedným, a vôbec nie najdôležitejším dôsledkom. Všetky spory medzi jednotlivcami i vojny medzi národmi by prestali. Ak by sa aj vyskytli nejaké nezhody či názorové rozdiely, stačilo by si spoločne sadnúť a počítať. Tak by sa zaraz zistilo, kto má pravdu, a túto s nezvratnou jasnosťou a presvedčivosťou spoznanú pravdu by všetci, samozrejme, prijali a rešpektovali. Ľudstvo by mohlo postupne objavovať a nakoniec vyčerpať všetky pravdy. Medzi nimi miesto najpoprednejšie zaujme Pravda o Božej existencii a pravom náboženstve, „ktoré sa najväčšmi zhoduje s rozumom, a nabudúce sa bude treba obávať odpadnutia od neho práve tak málo, ako sa treba obávať odvrátenia sa ľudí od aritmetiky a geometrie, keď sa ich už raz naučili.“

Akokoľvek naivne a utopicky nám môžu Leibnizove nádeje pripadať dnes, jeho projektu nemožno uprieť veľkolepосť. Pokiaľ ide o metódy, jeho génius predbehol svoju dobu o takmer tri storočia a presne predvídal smery ďalšieho rozvoja matematickej logiky: výrokový a predikátový počet, Gödelovu aritmetizáciu metamatematiky, ako aj symbolickú reprezentáciu dát a poznatkov využívanú pri počítačovej implementácií a spracovaní. Keď si zároveň uvedomíme, ako ďaleko sme napriek všetkému dosiahnutému vedeckému a technologickému pokroku od naplnenia Leibnizovho sna o večnom mieri, ťažko sa ubránime pocitu márnosti, beznádeje a sklamania z nepoučiteľného a nepolepšiteľného ľudského pokolenia.

V 18. storočí sa logikou zapodievalo viacero učencov, ktorých vedecké a filozofické záujmy mali, podobne ako u Leibniza, podstatne širší záber. Za všetkých spomeňme len z Alsaska pochádzajúceho nemeckého matematika, astronóma, fyzika a filozofa Johanna Heinricha Lamberta (1728–1777). Lambert ako prvý dokázal iracionalitu čísla π a svojou štúdiou *Teória rovnobežných priamok* (1766) sa stal jedným z predchodcov neeuklidovskej geometrie. Jeho práce *Photometria* (1760) a *Pyrometria* (1779) predstavujú dôležité príspevky k teórii svetla resp. tepla. Jeho hlavné filozofické dielo *Nové Organon* (1764) prinieslo prenikavú analýzu množstva otázok týkajúcich sa o. i. formálnej logiky, pravdepodobnosti a metodológie vedy. Spolu s anglickým matematikom, astronómom a výrobcom vedeckých prístrojov Thomasom Wrightom (1711–1786) a nemeckým filozofom Immanuelom Kantom (1724–1804), s ktorým si dopisoval, patril k prvým, kto rozpoznal, že špirálovité hmloviny viditeľné hvezdárskym ďalekohladom na nočnej oblohe sú hviezdne galaxie diskovitého tvaru podobné našej Mliečnej dráhe.

Na druhej strane bol to práve Kant, kto vo svojom najvplyvnejšom filozofickom diele *Kritika čistého rozumu* (1781) vyslovil myšlienku, že logika je prakticky zavŕšená disciplína, ku ktorej už nemožno dodať nič podstatné. Keď uvážime, aký malý bol pokrok, ktorý dovtedy urobila logika od čias Aristotelových, nemožno sa mu ani veľmi čudovať. Už približne o polstoročie neskôr sa však malo ukázať, že to bol fatálny omyl. A nebol to jediný Kantov omyl, ktorý – podporený jeho nesporne zaslúženou autoritou – na istý čas zbrzdil prirodzený vývoj vedy. Ešte známejšou ukážkou toho je Kantova téza o absolútnom charaktere priestoru a času ako čistých apriórnych foriem nášho názoru, mimo ktorých nie je možné zmyslové vnímanie a poznávanie. Pritom tento priestor je totožný s priestorom euklidovskej geometrie a iný priestor si ani nemožno predstaviť. Táto Kantova téza bola pravdepodobne jedným z dôvodov, kvôli ktorým sa Carl Friedrich Gauss (1777–1855), jeden z najväčších matematikov všetkých čias, zdráhal zverejniť svoje objavy týkajúce sa neeuklidovskej geometrie. Medzitým však dozrel čas nato, aby neuklidovská geometria uzrela svetlo sveta.

Neeuklidovská geometria

Neuklidovská geometria zohrala vo vývoji logiky pozoruhodnú a nie plne docenenú úlohu. Jej vznik ide na vrub už spomínaného piateho Euklidovho postulátu. Ten býva najčastejšie uvádzaný v znení: *s danou priamkou možno bodom, ktorý na nej neleží, viesť práve jednu rovnobežku*, v ktorom ho uvádza novoplatónsky filozof Proklos z Lýkie (asi 410–485 n. l.) vo svojich *Komentároch k Euklidovi.* Toto znenie nájdeme aj u anglického klerika a matematika Williama Ludlama (1717–1788); pomenované je však po škótskom prírodovedcovi a matematikovi Johnovi Playfairovi (1748–1819), ktorý ho uvádza vo svojom diele *Základy geometrie* (1795). *Playfairova axióma* je v úplnej zhode s geometrickým názorom, stále je však formulovaná podstatne zložitejšie než zvyšné Euklidove axiómy a postuláty. To vyvoláva podozrenie, že piaty postulát – či už v pôvodnej alebo v takto modifikovanej podobe – by sa mal dať zo zvyšných axióm a postulátov dokázať, teda, že je vlastne zbytočný. O jeho dôkaz sa skutočne pokúšalo viacero učencov a niektorí z nich boli dokonca presvedčení, že sa im to naozaj podarilo. Zakaždým však vyšlo najavo, že ich „dôkaz“ sa popri zvyšných Euklidových axiómach a postulátoch opieral aj o nejaké ďalšie tvrdenie, ktoré bolo natoľko v zhode s geometrickým názorom, že ho považovali za samozrejmé. A práve toto tvrdenie bolo len inou, ekvivalentnou formuláciou piateho postulátu.

Keď sa rozhodneme poprieť piaty postulát a trváme pritom na homogénnosti priestoru, teda, že žiadny bod či priamka v ňom nemajú výsadné postavenie, tak máme len dve možnosti. Buď musíme prijať postulát, že s danou priamkou nemožno bodom, ktorý na nej neleží, viesť žiadnu rovnobežku, čo má za následok, že ľubovoľné dve rôzne priamky sa pretnú v jedinom bode. Alebo musíme prijať postulát, že s danou priamkou možno bodom, ktorý na nej neleží, viesť aspoň dve rôzne rovnobežky, čo má za následok, že takýchto rovnobežiek bude dokonca nekonečne mnoho.

V prvom prípade možno ďalej odvodiť, že všetky priamky majú konečnú dĺžku, čo protirečí druhému postulátu, podľa ktorého možno každú danú úsečku ľubovoľne predĺžiť. Tým je prvý prípad vybavený ako nemožný a ďalej sa ním netreba zapodievať. (O tom, ako si s týmto prípadom poradil Bernhard Riemann a vytvoril tým tzv. *eliptickú geometriu*, už v našom kurze písať nebudeme.) Zostáva teda len druhý prípad; v ňom však postupne dospejeme k podivným záverom, ktoré budeme náchylní považovať za absurdné. Napríklad, že súčet vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je menší než dva pravé a klesá s rastúcim obsahom trojuholníka. Špeciálne, keď budeme konštruovať rovnoramenný pravouhlý trojuholník, ktorého základňa leží na danej priamke p a výška na danej kolmici na túto priamku, tak oba uhly, ktoré zvierajú ramená tohto trojuholníka s priamkou p, budú menšie ako polovica pravého uhla a s rastúcou výškou bude ich veľkosť klesať. No nielen to: existuje istá medzná hodnota, ktorú keď výška dosiahne či presiahne, tak trojuholník nebude viac možné zostrojiť, lebo jeho zamýšľané ramená nikdy nepretnú priamku p; inak povedané, priamky v predĺžení týchto ramien budú rovnobežné s priamkou p. Je záležitosťou osobného vkusu, kedy toho už budeme mať dosť a nejaký podobný záver prehlásime za sporný. Nebude to však spor s rozumom (t. j. logický spor), ale iba spor s naším geometrickým názorom. A – ako sa zakaždým ukázalo – popretie príslušného „absurdného“ záveru bolo *logicky ekvivalentné* s piatym postulátom. Na druhej strane možno na tieto „absurdné“ dôsledky pozerať ako na historicky prvé teorémy novej tzv. *hyperbolickej geometrie*.

Naladenosť prieskumníkov voči podivnému svetu, ktorý sa im nenápadne otváral a oni doňho bázlivo nazerali, sa však postupne mení. Na základe jeho sporu s prirodzeným geometrickým názorom ho zavrhujú napr. islamskí učenci Thabit Ibn Qurra (asi 830 až 901), Hassan Ibn al-Haytham (asi 965–1040) či Omar Chajjám (1048–1131), aj talianski učenci neskorej renesancie Giovanni Alfonso Borelli (1608–1679), Giordano Vitale (1633 až 1711) a Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733). A tento spor podľa svojho vlastného názoru považujú za dôkaz piateho postulátu. Napr. Saccheri vo svojom krátko pred smrťou vydanom pojednaní *Euklides každej poškvrny zbavený* (1733) dospieva k záveru, že v rovine, v ktorej by neplatil piaty postulát, by neexistoval žiadny štvorec. Ak teda uznáme platnosť „samozrejmého faktu“, že v rovine existuje aspoň jeden štvorec, budeme na základe toho schopní dokázať piaty postulát. Saccheri napriek tomu vábeniu podivného neeuklidovského sveta očividne podlieha a váhavo ho pripúšťa ako logicky možný, avšak odporujúci skutočnému svetu. Prvý, kto otvorene priznáva, že ho svet neeuklidovskej geometrie láka, a želá si, aby bol popri euklidovskom svete tiež aspoň logicky možný, je už spomínaný Lambert v r. 1766.

V r. 1807 vydáva nemecký právnik a amatérsky matematik Ferdinand Karl Schweikart (1780–1857) štúdiu s veľavravným názvom *Teória rovnobežných priamok spolu s návrhom na jej vypudenie z geometrie* a v r. 1818 píše v liste Gaussovi o dvojakej geometrii. Ide jednak o geometriu v užšom zmysle (čím myslí euklidovskú geometriu) a všeobecnú, tzv. *astrálnu geometriu*, v ktorej je súčet vnútorných uhlov v trojuholníku menší než dva pravé. Jeho myšlienky ďalej rozvíja jeho synovec, matematik Franz Adolph Taurinus (1794–1874). Ten ešte v r. 1825 vo svojej práci *Teória rovnobežných priamok* dokazuje, že euklidovská geometria je jediná možná. No už rok na to vydáva spis *Geometriae prima elementa*, v ktorom modeluje astrálnu geometriu ako geometriu na „sfére s imaginárnym polomerom“ a nazýva ju *logaritmicko-sférickou geometriou.* V ňom Taurinus zároveň pripúšťa možnosť geometrie, v ktorej by súčet uhlov v trojuholníku bol väčší než dva pravé, čím predjíma Riemannovu eliptickú geometriu. Takúto geometriu možno (po stotožnení dvojíc antipodálnych bodov) realizovať ako geometriu na sférickom povrchu. Taurinus však stále priznáva euklidovskej geometrii výsadné postavenie a považuje ju za jedinú pravú geometriu.

Gaussovi sa neeuklidovský geometrický svet začal otvárať približne v r. 1795 a pravdepodobne okolo r. 1800 sa už v tomto svete bezpečne orientoval. Postupne si uvedomil, že tie „absurdné“ dôsledky popretia piateho postulátu nepredstavujú logický spor, ale patria k vlastnostiam novej geometrie, ktorú neskôr nazval *neeuklidovskou geometriou.* O dôvodoch, pre ktoré nič z nadobudnutých poznatkov neuverejnil, sa môžeme len dohadovať. Popri už zmienenej Kantovej téze to mohla byť obava z „kriku Bojóťanov“, čiže z hroziaceho škandálu, ktorý by mohol ohroziť jeho reputáciu. Sám Gauss totiž zastával v tom čase prevládajúce stanovisko, že geometria je vedou o štrukturálnych zákonitostiach *reálneho priestoru*, a nie skúmaním možností rôznych „priestorupodobných“ štruktúr, prípustných výlučne na základe logickej konzistentnosti. To z nej činí empirickú prírodnú vedu podobnú fyzike. V tejto súvislosti si Gauss zároveň uvedomil, že otázka platnosti piateho postulátu by sa mohla dať rozhodnúť experimentom. Keď sa v rokoch 1821–25 podielal na geodetickej triangulácii Hanoverského kráľovstva, podrobne premeral uhly v najväčšom trojuholníku budovanej geodetickej siete, tvorenom vrcholmi kopcov Brocken, Hoher Hagen a Grosser Inselsberg so stranami 69, 85 a 107 km. Odchýlka súčtu týchto uhlov od 180° však neprevyšovala možnú chybu merania. Podstatne neskôr Gauss vyjadril názor, že na odhalenie prípadnej nezhody reálneho priestoru s euklidovskou geometriou by bolo nevyhnutné meranie uhlov v trojuholníku, ktorého strany by mnohonásobne prevyšovali zemský polomer. Zároveň si však uvedomil, že takéto meranie má šancu jedine vyvrátiť piaty postulát; aby sme ho mohli meraním bezpečne potvrdiť, museli by sme byť schopní merať uhly s absolútnou presnosťou.

A tak sú za objaviteľov neeuklidovskej geometrie právom považovaní až ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a maďarský dôstojník rakúskej armády a amatérsky matematik János Bolyai (1802–1860). Na základe toho sa hyperbolická geometria zvykne nazývať aj Lobačevského prípadne Bolyaiho-Lobačevského geometriou.

János Bolyai bol synom gymnaziálneho profesora matematiky, fyziky a chémie Farkasa Bolyaia, Gaussovho priateľa zo štúdií, ktorý sa kedysi sám nie príliš úspešne zaoberal problematikou piateho postulátu. Z toho dôvodu svojho syna odrádzal od podobných snáh. János sa však odradiť nedal a v priebehu rokov 1820 až 1823 sa mu podľa vlastných slov podarilo „objaviť obdivuhodné veci, nad ktorými žasol, [. . . a . . .] z ničoho stvoriť podivný nový svet“. Rukopis, ktorý r. 1826 poslal na posúdenie svojmu učiteľovi na Cisárskej a kráľovskej vojenskej akadémii vo Viedni, bol však odmietnutý. A tak jeho objavy vyšli až v r. 1832 v podobe stručného dodatku k stredoškolskej matematickej učebnici jeho otca. V ňom autor predstavil tzv. *absolútnu geometriu*, ktorá zahŕňa euklidovskú aj (vtedy ešte tak nenazývanú) hyperbpolickú geometriu ako špeciálne prípady. Farkas Bolyai poslal synov spis na posúdenie Gaussovi. Ten mu odpísal, že k podobným výsledkom sa sám dopracoval už dávnejšie a vzápätí ho veľmi zdržanlivo pochválil. Kým otec sa cítil Gaussovou odpoveďou poctený, na mladého Jánosa zaúčinkovala deprimujúco.

Lobačevskij po prvý raz verejne predstavil svoj objav neeuklidovskej geometrie, ktorú nazýval *imaginárnou geometriou*, v r. 1826 v prednáške na univerzite v Kazani. Následne v priebehu rokov 1829 až 1855 publikoval celý rad prác venovaných jej rozpracovaniu a výkladu. V ruských akademických centrách na univerzitách v Petrohrade a v Moskve sa Lobačevskij stretol s nepochopením a odmietnutím. Uznania sa dočkal až vďaka Gaussovi potom, ako ten čítal jeho *Geometrické skúmania k teórii rovnobežných priamok* v nemeckom preklade, ktorý vyšiel v Berlíne r. 1840. Gauss sa dokonca začal učiť po rusky, aby mohol čítat ďalšie Lobačevského práce. Na jeho návrh bol Lobačevskij r. 1842 prijatý za člena Götingenskej učenej spoločnosti.

Lobačevskij zastával názor, že skúmanie rôznych typov geometrií má zmysel bez ohľadu nato, ktorá z nich dáva adekvátny popis štruktúry reálneho priestoru. V tomto duchu sa nesie jeho dielo *Pangeometria* (1855), v ktorom je o. i. euklidovská geometria zrekonštruovaná v rámci hyperbolickej geometrie. Napriek tomu sa však aj on pokúšal zistiť, aká je geometria reálneho priestoru. Nemeral však uhly v trojuholníkoch pozemských rozmerov, ale v trojuholníkoch tvorených hviezdnymi stálicami. S rovnakým cieľom analyzoval astronomické údaje získané meraním paralláx Síria a ďalších hviezd. Ani tak sa mu však významnú odchýlku, ktorá by mohla potvrdiť neeuklidovský charakter reálneho priestoru, odhaliť nepodarilo.

Ani Gaussov, Bolyaiho a Lobačevského vhľad a samozrejmosť, ba priam virtuozita, s akou sa v podivnom svete hyperbolickej geometrie orientovali, však samy o sebe nezaručujú, že nejde o prelud, ktorý sa skôr či neskôr zosype v logickom spore ako domček z karát. Úprimne si však musíme priznať, že takúto istotu nemáme ani v prípade euklidovského geometrického sveta. Tu nám to však nijako neprekáža, lebo náš geometrický vhľad, o ktorý opierame svoju vieru v jeho bezospornosť, je všeobecne zdieľaný a podporovaný tradičným vzdelaním. Preto by nám stačilo, keby sme vedeli dokázať bezospornosť hyperbolickej geometrie za predpokladu bezospornosti geometrie euklidovskej. Poznamenajme, že bezospornosť euklidovskej geometrie za predpokladu bezospornosti tej hyperbolickej je dôsledkom pred chvíľou spomínaných výsledkov Lobačevského, i keď on sám si otázku takto nekládol.

Jestvuje viacero *modelov* hyperbolickej geometrie vnútri geometrie euklidovskej. Postačí však, keď sa aspoň v náznaku zoznámime s jedným z nich. Jeho prvú podobu vytvoril v r. 1868 Eugenio Beltrami (1835–1900). Tú na základe jedného pozorovania Arthura Cayleyho (1821–1895) upravil r. 1871 Felix Klein (1849–1925) do finálnej podoby známej ako *Beltramiho-Kleinov model.* Je prekvapivo jednoduchý: v tomto modeli sú bodmi hyperbolickej roviny vnútorné body nejakého kruhu v euklidovskej rovine a priamkami tetivy kružnice ohraničujúcej onen kruh bez krajných bodov.

Myšlienka modelovania (interpretácie) jednej teórie prostredníctvom inej bude zohrávať v 20. storočí v matematickej logike i v celej matematike len ťažko doceniteľnú úlohu. Dva spektakulárne príklady úspešného použitia tejto metódy predstavujú Gödelov model *univerza konštruktívnych množín* (1940) a Cohenova metóda *forcingu* (1963). Gödelovo konštruktívne univerzum je modelom Zermelovej-Fraenkelovej teórie množín ZF s axiómou výberu a všeobecnou hypotézou kontinua vo vnútri univerza teórie ZF. Cohen pomocou forcingu zostrojil model teórie množín ZF s negáciou axiómy výberu vo vnútri univerza teórie ZF, ako aj model teórie množín ZF s axiómou výberu a negáciou hypotézy kontinua vo vnútri univerza teórie ZF s axiómou výberu. To dohromady dokazuje nezávislosť axiómy výberu na axiomách teórie množín ZF, ako aj nezávislosť hypotézy kontinua na axiómach teórie ZF s axiómou výberu.